



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS
UNAH-VS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
GUÍA DE VARIABLE COMPLEJA
MM502

Profesor: M.J. Suazo

Nombre: _____ # Cuenta: _____

Instrucciones: Desarrolle los siguientes problemas de forma CLARA Y ORDENADA lo que se le pide. ESTA SERÁ LA PORTADA DE LA TAREA. USE LAS REVÉS Y DERECHO LAS HOJAS.

REPASO PRIMERA UNIDAD.

1. Describa y represente las siguientes regiones, diga cuales no tienen solución.

- a) $z\bar{z} \geq 2\operatorname{Re}z$
- b) $\operatorname{Im}z \geq \operatorname{Re}(z^2)$
- c) $|z + 3 - 4i| \leq 5$

Diga si los conjuntos son abiertos, cerrados, acotados, son dominios.

2. ¿Para que valores z existen las derivadas las siguientes funciones?. En que puntos son analíticas?

- a) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(2xy + x^2 - 2y^2)$
- b) $f(z) = 1$
- c) $f(z) = r^2 \sin(4\theta) - ir^4 \cos(4\theta)$

MAPEOS Y LÍMITES

1. Encuentre la imagen de la región $1 \leq |z| \leq 2, \pi/4 \leq \arg(z) \leq 3\pi/4$ bajo los siguientes mapeos.

- a) $f(z) = z^2$
- b) $f(z) = z^3$
- c) $f(z) = z^4$

2. Encuentre la imagen de la región $y = -3; f(z) = -z^2 + i$

3. Encuentre la imagen de la línea $x = 2; f(z) = iz^2 - 3$

4. Calcule $\lim_{z \rightarrow 2-i} (z^2 - z)$. Use teoremas de límites.

5. Calcule $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^4 - 1}{z + i}$. Use teoremas de límites.

6. Pruebe que $\lim_{z \rightarrow 1+i} ((1-i)z + 2i) = 2 + 2i$. Pruebe con la definición epsilon-delta.

5. Calcule $\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^5 + 4z}{z^2 - 2z + 2}$. Use regla de L'Hopital.

FUNCIONES ANALÍTICAS

1. Muestre que las siguientes funciones no son analíticas en ningún punto. Explique.

a) $f(z) = \operatorname{Re}(z)$

b) $f(z) = 4z - 6\bar{z} + 3$

c) $f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$

2. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Muestre que en coordenadas polares, las ecuaciones de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

y la derivada $f'(z) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$

3. Muestre que las siguientes funciones son analíticas en un dominio. Mencione porque algunas son funciones enteras. Encuentre la derivada de cada función.

a) $f(z) = x + \sin x \cosh y + i(y + \cos x \sinh y)$

b) $f(z) = \exp(z^2)$

c) $f(z) = 5r \cos(\theta) + r^4 \cos(4\theta) + i(5r \sin(\theta) + r^4 \sin(4\theta))$

d) $f(z) = \sin z$. Sugerencia: Haga $\sin(x + iy)$ y deje de la forma $a + ib$ y luego use las ecuaciones C-R.

e) $f(z) = \cos z$. Siga la sugerencia del ejercicio anterior.

4. Sea $u(x, y) = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + y - x + 1$, la parte real de una función de variable compleja. Determine la parte imaginaria, sabiendo que $f(i) = i$.

5. Sea $\Phi(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ representa el potencial complejo de cierta configuración electrostática, expresado en voltios.

a) Use el potencial complejo para determinar el campo eléctrico complejo en $x = 1, y = 1/2$.

b) Obtenga el campo eléctrico complejo en el mismo punto determinado y usando el potencial electrostático $\phi(x, y)$.

c) Suponiendo que la configuración se encuentra en el vacío, determine las componentes D_x, D_y del vector de densidad de flujo eléctrico en $x = 1, y = 1/2$, en sistema m.k.s., $\epsilon = 8.85 \times 10^{-12}$ en el vacío.

FUNCIONES ELEMENTALES

1. Escriba de la forma $a + bi$ los siguientes números complejos. Aproxime con los valores principales

a) $\sin(2 - i)$

b) $\sinh(1 + i)$

c) e^{4+i}

d) $\sec(1 - i)$

e) i^{e^i}

f) $\arccos(-i)$

g) $\sec^{-1}(1 - i)$

h) $\log(1 + i)$

i) 2^{4i}

j) Demuestre que la rama principal de la función $f(z) = \log z$ es analítica y que su derivada es $1/z$.