UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS
UNAH-VS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
GUÍA DE VARIABLE COMPLEJA
MM502

Profesor: M.J. Suazo

Nombre____________________________________# Cuenta____________________________________

Instrucciones: Desarrolle los siguientes problemas de forma CLARA Y ORDENADA lo que se le pide. ESTA SERÁ LA PORTADA DE LA TAREA. USE LAS REVÉS Y DERECHO LAS HOJAS.

REPASO PRIMERA UNIDAD.

1. Describa y represente las siguientes regiones, diga cuales no tienen solución.
$a)$ $z\overline{z} \geq 2Rez$
$b)$ $Imz \geq Re(z^2)$
$c)$ $|z + 3 - 4i| \leq 5$
Diga si los conjuntos sson abiertos, cerrados, acotados, son dominios.

2. ¿Para que valores z existen las derivadas las siguientes funciones?. En que puntos son analíticas?
$a)$ $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(2xy + x^2 - 2y^2$
$b)$ $f(z) = 1$
$c)$ $f(z) = r^2 \sin(4\theta) - ir^4 \cos(4\theta)$

MAPEOS Y LÍMITES

1. Encuentre la imagen de la región $1 \leq |z| \leq 2$, $\pi/4 \leq arg(z) \leq 3\pi/4$ bajo los siguientes mapeos.
a) $f(z) = z^2$
b) $f(z) = z^3$
c) $f(z) = z^4$
2. Encuentre la imagen de la región $y = -3$; $f(z) = -z^2 + i$
3. Encuentre la imagen de la línea $x = 2$; $f(z) = iz^2 - 3$
4. Calcule $\lim\limits_{z \to 2-i} (z^2 - z)$. Use teoremas de límites.

5. Calcule $\lim\limits_{z \to -i} \dfrac{z^4 - 1}{z + i}$. Use teoremas de límites.

6. Pruebe que $\lim\limits_{z \to 1+i} ((1 - i)z + 2i) = 2 + 2i$. Pruebe con la definición epsilon-delta.

5. Calcule $\lim\limits_{z \to 1+i} \dfrac{z^5 + 4z}{z^2 - 2z + 2}$. Use regla de L'Hopital.

FUNCIONES ANALÍTICAS

1. Muestre que las siguientes funciones no son analíticas en ningún punto. Explique.
a) $f(z) = Re(z)$
b) $f(z) = 4z - 6\overline{z} + 3$
c) $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

2. Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Muestre que en coordenadas polares, las ecuaciones de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

y la derivada $f'(z) = e^{-i\theta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + i\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \theta} - i\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)$

3. Muestre que las siguientes funciones son analíticas en un dominio.Mencione porque algunas son funciones enteras. Encuentre la derivada de cada función.
a) $f(z) = x + \sin x \cosh y + i(y + \cos x \sinh y)$

b) $f(z) = \exp(z^2)$

c) $f(z) = 5r\cos(\theta) + r^4\cos(4\theta) + i(5r\sin(\theta) + r^4\sin(4\theta))$

d) $f(z) = \sin z$. Sugerencia: Haga $\sin(x+iy)$ y deje de la forma $a+ib$ y luego use las ecuaciones C-R.

e) $f(z) = \cos z$. Siga la sugerencia del ejercicio anterior.

4. Sea $u(x,y) = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + y - x + 1$, la parte real de una función de variable compleja. Determine la parte imaginaria, sabiendo que $f(i) = i$.

5. Sea $\Phi(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ representa el potencial complejo de cierta configuración electroestática, expresado en voltios.

a) Use el potencial complejo para determinar el campo eléctrico complejo en $x = 1$, $y = 1/2$.

b) Obtenga el campo eléctrico complejo en el mismo punto determinado y usando el potencial electroestático $\phi(x,y)$.

c) Suponiendo que la configuración se encuentra en el vacío, determine las componentes D_x, D_y del vector de densidad de flujo eléctrico en $x = 1$, $y = 1/2$, en sistema m.k.s., $\epsilon = 8.85\times10^{-12}$ en el vacío.

FUNCIONES ELEMENTALES

1. Escriba de la forma $a+bi$ los siguientes números complejos. Aproxime con los valores principales
a) $sin(2-i)$
b) $\sinh(1+i)$
c) e^{4+i}
d) $\sec(1-i)$
e) i^{e^i}
f) $\arccos(-i)$
g) $\sec^{-1}(1-i)$
h) $log(1+i)$
i) 2^{4i}
j) Demuestre que la rama principal de la función $f(z)=\log z$ es analítica y que su derivada es $1/z$.